DV 6

Exercice 1 (suites arithmético-géométriques)

Depuis qu'il est à la retraite, un homme tond sa pelouse tous les samedis et recueille chaque fois 120 litres de gazon qu'il stocke dans un bac à compost de 300 litres. Chaque semaine, les matières stockées perdent, par décomposition ou prélèvement, les trois quart de leur volume.
On note v_n le volume en litres de compost stocké le $n^{\text{ème}}$ samedi à partir du premier samedi de sa retraite ($v_1 = 120$).

1°) a) Montrer que $v_2 = 150$ et $v_3 = 157,5$.
b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

2°) Soit la suite (t_n) définie pour tout entier n par $t_n = 160 - v_n$.

a) Montrer que (t_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
b) En déduire les expressions de t_n en fonction de n puis de v_n en fonction de n.
c) Montrer que la suite (v_n) est convergente et préciser sa limite.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n \end{cases}$.

1°) Montrer que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2°) On pose pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $v_n = \frac{u_n}{n}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

3°) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $u_n = n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Exercice 3 (suites homographiques)

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2\,u_n + 4}{u_n + 4} \end{cases}$. On admet qu'elle est à termes tous positifs.

1°) Calculer les trois premiers termes de la suite. Que peut-on en déduire ?

2°) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
b) Exprimer v_n en fonction de n puis en déduire l'expression de (u_n) en fonction de n.

Exercice 4 (suites imbriquées)

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = 1$ et $v_0 = 12$ et pour tout entier naturel : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2\,v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3\,v_n) \end{cases}$.

1°) Calculer les trois premiers termes de chaque suite.
2°) Montrer que la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = v_n - u_n$ est géométrique.
3°) Montrer que la suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = 3\,u_n + 8\,v_n$ est une suite constante.
4°) Exprimer u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 5 (suites récurrentes d'ordre 2)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 0 \text{ , } u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 7\,u_n + 8\,u_{n-1} \end{cases}$.

Pour tout entier n, on pose $s_n = u_{n+1} + u_n$. Montrer que (s_n) est une suite géométrique. En déduire l'expression de s_n en fonction de n.

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + n - 1 \end{cases}$.

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : pour tout entier n, $v_n = 4\,u_n - 6n + 15$.
1°) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
2°) Exprimer v_n en fonction de n.
3°) En déduire que pour tout entier n : $u_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$.
4°) En déduire que (u_n) est la somme d'une suite géométrique et d'une suite arithmétique.
5°) En déduire que $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{57}{8}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] + \frac{3\,(n-5)(n+1)}{4}$.