# APPROXIMATION D'UNE COURBE INTÉGRALE AVEC UN TABLEUR

TP n° 16

## A : Utilisation de la meilleure approximation affine de *f* en *a*

On suppose que *f* est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(0) = 1 \text{ et, pour tout réel } t \text{ appartenant à } \mathbb{R},\ f'(t) = 2 - t.$$

*f* étant dérivable sur $\mathbb{R}$, pour tout réel *a*, on a l'approximation :

pour *h* voisin de 0, $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$, c'est-à-dire $f(a+h) \approx f(a) + (2-a)h$.

En prenant, par exemple, $h = 0{,}2$, on obtient successivement :

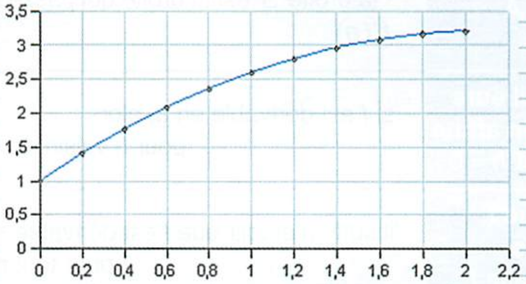
$$f(0{,}2) \approx f(0) + 2 \times 0{,}2 \approx 1{,}4\ ; \qquad f(0{,}4) \approx f(0{,}2) + (2-0{,}2) \times 0{,}2 \approx 1{,}4 + 0{,}36 \approx 1{,}76\ ;$$
$$f(0{,}6) \approx f(0{,}4) + (2-0{,}4) \times 0{,}2 \approx 1{,}76 + 0{,}32 \approx 2{,}08\ ; \quad \text{etc.}$$

En plaçant les points $A_0(0\ ;1)$, $A_1(0{,}2\ ;1{,}4)$, $A_2(0{,}4\ ;1{,}76)$, $A_3(0{,}6\ ;2{,}08)$ … et en traçant les segments joignant deux points consécutifs, on obtient une courbe $\mathscr{C}_g$ représentant une fonction *g* affine par intervalles qui constitue une approximation de la courbe $\mathscr{C}$ de *f* sur l'intervalle $[0\ ;2]$.

L'utilisation d'un tableur peut se révéler pertinente.
La valeur du pas *h* est écrite dans la cellule B1.
La cellule B5 contient *la formule* permettant de calculer $f(a) + (2-a)h$, où *a* est la valeur contenue dans A4.

B5 = =B4+$B$1*(2-A4)

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | pas | 0,2 |
| 2 | | |
| 3 | $x$ | $f(x) \approx$ |
| 4 | 0 | 1 |
| 5 | 0,2 | 1,4 |
| 6 | 0,4 | 1,76 |
| 7 | 0,6 | 2,08 |
| 8 | 0,8 | 2,36 |
| 9 | 1 | 2,6 |
| 10 | 1,2 | 2,8 |
| 11 | 1,4 | 2,96 |
| 12 | 1,6 | 3,08 |
| 13 | 1,8 | 3,16 |
| 14 | 2 | 3,2 |




**1°** Représenter la courbe obtenue en prenant un pas de 0,1 ; puis un pas de 0,05.

**2° Évaluation de l'erreur commise**

Prouver que la fonction *f* définie par $f(x) = -0{,}5\,x^2 + 2x + 1$ convient.

En complétant la feuille de calcul du tableur, donner des valeurs approchées de l'erreur commise quand on remplace $f(x)$ par son approximation $g(x)$. Représenter $f$ sur le graphique contenant $\mathscr{C}_g$.
Observer l'évolution de cette erreur si on modifie le pas.

## B : Applications

Utiliser la méthode décrite ci-dessus pour visualiser des approximations de la courbe représentative de la fonction *f* dérivable sur l'intervalle *I* dans chacun des cas suivants :

**a)** $I = [1\ ;3]$, $f(1) = 0$ et, pour *x* dans $[1\ ;3]$, $f'(x) = \dfrac{3}{x}$.

**b)** $I = [0\ ;4]$, $f(0) = 0$ et, pour *x* dans $[0\ ;4]$, $f'(x) = \sqrt{x}$.